武汉市2021届高中毕业生五月供题

数学参考答案及评分细则

选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	A	C	B	C	B	BD	BC	AC	ABD

填空题

13. 1　　14. $\dfrac{e^x+x-1}{2}$（其它正确答案同样给分）　　15. 21　　16. $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

解答题

17.解：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=4\sqrt{3}$，代入$a=6$，得$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又$A$为锐角，故$A=\dfrac{\pi}{3}$.　　……（4分）

若选①，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=\dfrac{15}{2}$，由$\cos A=\dfrac{1}{2}$，得$bc=15$.

又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$b^2+c^2-bc=36$，$(b+c)^2-3bc=36$，得$b+c=9$.

$\therefore\ \Delta ABC$周长为$a+b+c=15$.　　……（10分）

若选②，$\sqrt{3}\sin C+\cos C=\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}$，即$\sqrt{3}\sin C\sin B+\cos C\sin B=\sin(B+C)+\sin C$.

化简得$\sqrt{3}\sin B=\cos B+1$，即$2\sin(B-\dfrac{\pi}{6})=1$，解得$B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$(舍).

故$B=\dfrac{\pi}{3}$，此时ΔABC为等边三角形，周长为$3a=18$.　　……（10分）

若选③，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，得$bc=\dfrac{28}{3}$.

又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$b^2+c^2-bc=36$，$(b+c)^2-3bc=36$，得$b+c=8$.

$\therefore\ \Delta ABC$周长为$a+b+c=14$.　　……（10分）

18.解：

（1）设$\{a_n\}$公比为q，$a_1(q+q^2)=6$，代入$a_1=3$，解得$q=-2$或$q=1$.

当$q=-2$时，$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3\cdot(-2)^{n-1}$；

当$q=1$时，$a_n=a_1=3$.　　……（6分）

（2）当$a_n=3$时，$b_4=\dfrac{2^4}{(3+1)(3+1)}=1$，矛盾.

$\therefore\ a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$，$b_n=\dfrac{2^n}{(3\cdot 2^{n-1}+1)(3\cdot 2^n+1)}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1}-\dfrac{1}{3\cdot 2^n+1})$

$\therefore S_n=\frac{2}{3}[(\frac{1}{3\cdot 2^0+1}-\frac{1}{3\cdot 2^1+1})+(\frac{1}{3\cdot 2^1+1}-\frac{1}{3\cdot 2^2+1})+\ldots+(\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}+1}-\frac{1}{3\cdot 2^n+1})]$

$=\frac{2}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 2^n+1})=\frac{1}{6}-\frac{2}{9\cdot 2^n+3}$. ……（12 分）

19.解：

（1）记所求事件为 A，9 天中日产量不高于三十万支的有 5 天.

$P(A)=\frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{10}{21}$. ……（4 分）

（2）$\because y=\ln(bt+a)$，$\therefore z=e^y=bt+a$，$\bar{t}=5$，$\sum_{i=1}^{9}t_i^2=285$.

$$\therefore b=\frac{\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})(z_i-\bar{z})}{\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{9}t_iz_i-9\bar{t}\cdot\bar{z}}{\sum_{i=1}^{9}t_i^2-9\bar{t}^2}=\frac{1095-9\times5\times19}{285-9\times5^2}=4.$$

$\therefore a=\bar{z}-b\bar{t}=19-4\times5=-1$，$\therefore y=\ln(4t-1)$.令$\ln(4t-1)>4$，解得$t>\frac{e^4+1}{4}\approx13.9$.

$\therefore t\geq14$，即该厂从统计当天开始的第 14 天日生产量超过四十万支. ……（12 分）

20.解：

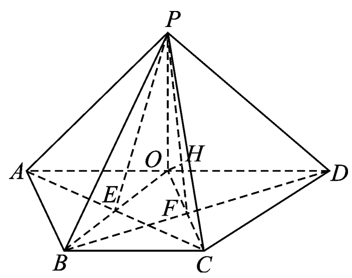
（1）取 AD 中点 O，连 PO，AC，BO，CO，设 AC 与 BO 交于 E，CO 与 BD 交于 F，连 PE，PF.

在等腰梯形 ABCD 中，由 AO∥BC 且 AO=BC=AB，故四边形 AOCB 为菱形，∴AC⊥BO.

又 PA=PC，且 E 为 AC 中点，∴AC⊥PE，又 PE∩BO=E，∴AC⊥平面 PBO.

又∵PO⊂平面 PBO，∴AC⊥PO；同理，由四边形 DOBC 为菱形，且 PB=PD，

∴BD⊥PO.



又直线 AC 与 BD 相交，∴PO⊥平面 ABCD，又∵PO⊂平面 PAD，∴平面 PAD⊥平面 ABCD. ……（6 分）

（2）设$PO=t$，过 O 作 OH⊥PF 交 PF 于 H，由 BD⊥平面 POC，故 BD⊥OH.

又 PF ∩ BD=F ， ∴ OH ⊥ 平 面 PBD ， $OF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$ ， 故

$$OH=\frac{\frac{1}{2}t}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{4t^2+1}}.$$

又 AD=2OD，故点 A 到平面 PBD 的距离$d=2OH=\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$.

设直线 PA 与平面 PBD 所成角的大小为θ.

则$\sin\theta=\frac{d}{PA}=\frac{d}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{4t^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{4t^2+\frac{1}{t^2}+5}}\leq\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{4t^2\cdot\frac{1}{t^2}}+5}}=\frac{2}{3}$.

当且仅当$4t^2=\frac{1}{t^2}$，即$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，故直线 PA 与面 PBD 所成角的正弦值的最大值为$\frac{2}{3}$. …（12 分）

21 解：

（1）由题意，双曲线在一三象限的渐近线的倾斜角为$30°$或$60°$，即$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\sqrt{3}$.

当$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，E 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{3y^2}{a^2}=1$，代入$(2,3)$，无解.

当$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$时，E 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$，代入$(2,3)$，解得$a^2=1$.

故 E 的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.　　　　　　……（4 分）

（2）直线斜率显然存在，设直线方程为$y=kx+t$，与$x^2-\frac{y^2}{3}=1$联立得：$(k^2-3)x^2+2ktx+t^2+3=0$.

由题意，$k\neq\pm\sqrt{3}$且$\Delta=4k^2t^2-4(k^2-3)(t^2+3)=0$，化简得：$t^2-k^2+3=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

将$y=kx+t$与$y=\sqrt{3}x$联立，解得$x_1=\frac{t}{\sqrt{3}-k}$；与$y=-\sqrt{3}x$联立，解得$x_2=\frac{-t}{\sqrt{3}+k}$.

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}|2x_1|\cdot|2x_2|\cdot\sin120°=\sqrt{3}|x_1x_2|=\frac{\sqrt{3}t^2}{|3-k^2|}$.

由$t^2-k^2+3=0$，$\therefore S_{\Delta AOB}=\sqrt{3}$，故$\Delta AOB$面积为定值$\sqrt{3}$.　　　　……（12 分）

22.解：

（1）$f'(x)=2(x-a)+2\cos x$.

设$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=2-2\sin x\geq0$，故$f'(x)$单调递增.

又$f'(a-2)=-4+2\cos(a-2)<0$，$f'(a+2)=4+2\cos(a+2)>0$.

故存在唯一$x_0\in(a-2,a+2)$，使得$f'(x_0)=0$.

当$x<x_0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

故x_0 是$f(x)$的唯一极值点.　　　　　　……（5 分）

（2）由（1）x_0 是$f(x)$的极小值点，且满足$x_0-a+\cos x_0=0$.

又$f(x_0-3)=(-3-\cos x_0)^2+2\sin(x_0-3)-\frac{7}{4}\geq4+2\sin(x_0-3)-\frac{7}{4}>0$；

同理$f(x_0+3)=(3-\cos x_0)^2+2\sin(x_0+3)-\frac{7}{4}\geq4+2\sin(x_0+3)-\frac{7}{4}>0$.

故 $f(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 有两个零点；$f(x_0)=0$ 时，$f(x)$ 有一个零点；$f(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 无零点.

又 $f(x_0)=(-\cos x_0)^2+2\sin x_0-\frac{7}{4}=-\sin^2 x_0+2\sin x_0-\frac{3}{4}=-(\sin x_0-\frac{3}{2})(\sin x_0-\frac{1}{2})$

令 $f(x_0)<0$，解得 $\sin x_0<\frac{1}{2}$，即 $2k\pi-\frac{7\pi}{6}<x_0<2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$.

令 $h(x)=x+\cos x$，$h'(x)=1-\sin x\geq 0$

此时 $a=x_0+\cos x_0$ 关于 x_0 单调递增，故 $2k\pi-\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\in Z)$.

令 $f(x_0)=0$，解得 $\sin x_0=\frac{1}{2}$，即 $x_0=2k\pi-\frac{7\pi}{6}$ 或 $x_0=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$.

此时 $a=x_0+\cos x_0$，故 $a=2k\pi-\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $a=2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\in Z)$

令 $f(x_0)>0$，解得 $\sin x_0>\frac{1}{2}$，即 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<x_0<2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$.

此时 $a=x_0+\cos x_0$ 关于 x_0 单调递增，故 $2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}<a<2k\pi+\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}(k\in Z)$.

综上所述：

当 $2k\pi-\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\in Z)$ 时，$f(x)$ 有两个零点；

当 $a=2k\pi-\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $a=2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\in Z)$ 时，$f(x)$ 有一个零点；

当 $2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}<a<2k\pi+\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}(k\in Z)$ 时，$f(x)$ 无零点.　　　……（12 分）